Integral-fördjupning

$$F(x)=\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx$$

Inga inre derivator att upptäcka, ej rationell funktion så vi är hänvisade till partiell integration eller variabelbyte. Vi börjar med partiell integration.

$$F(x)=\int 1\cdot\sqrt{x^2+\alpha}\,dx=x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}dx=$$

$$x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=$$

$$x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{x^2+\alpha-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=$$

$$x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}+\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx=$$

$$x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}-\underbrace{\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx}_{F(X)}+\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx=$$

$$2F(x)=x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}+\underbrace{\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}}_{G(x)}\,dx$$

Vi ser nu att partiell integration tar oss ganska långt inkl att se att vårt originaluttryck uppträder i integrationen vilket gör att vi kan förenkla det mycket. Dock kvarstår en integral G(x) som vi tidigare inte har löst och måste hantera separat, med variabelbyte.

$$G(x)=\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\alpha\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx$$

Gör nu det speciella variabelbytet:

$$\left|\begin{aligned}
&x+\sqrt{x^2+\alpha}=t\\
&\sqrt{x^2+\alpha}=t-x\\
&x^2+\alpha=t^2+x^2-2tx\\
&\alpha=t^2-2tx\\
&x=\frac{t^2-\alpha}{2t}\\
&\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+\alpha}{2t^2}
\end{aligned}\right|$$

$$G(x)=\alpha\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\alpha\int\frac{1}{t-\left(\frac{t^2-\alpha}{2t}\right)}\cdot\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt$$

$$\alpha\int\frac{1}{\frac{2t^2}{2t}-\left(\frac{t^2-\alpha}{2t}\right)}\cdot\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt=\alpha\int\frac{1}{\left(\frac{t^2+\alpha}{2t}\right)}\cdot\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt=\alpha\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\alpha\ln(t)+C=\alpha\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C$$

Använd nu resultatet för att lösa originalintegralen:

$$2F(x)=x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}+G(x)\ =$$

$$2F(x)=x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C$$

$$F(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C}{2}$$